

含中心距误差的行星轮系最大滑动率与变位系数优化的研究

李传祥 陈东 王朝阳 王晓 徐焕萍

(辽宁科技大学 机械工程与自动化学院, 鞍山 114051)

摘要:【目的】针对打捆装备行星减速器在重载时易发生齿面磨损和胶合失效的问题, 研究含中心距误差的3K-I型行星轮系最大滑动率及其影响因素, 旨在通过优化变位系数提升传动性能与寿命。【方法】首先, 基于齿轮啮合原理, 推导了含中心距误差的行星轮系最大滑动率计算式; 其次, 利用控制变量法分析了变位系数和齿数比对最大滑动率的影响规律; 再次, 基于等滑动率原则, 结合根切与重合度等约束条件, 构建了以各齿轮对滑动率差值之和最小为目标的优化模型; 最后, 利用Matlab软件进行非线性约束优化求解, 并对比分析了将中心距误差等作为设计变量的不同优化方案。【结果】结果表明, 变位系数是影响最大滑动率的主导因素。对比发现, 将中心距误差作为优化设计变量的方案最为合理, 该方案在给定误差范围内显著降低了各齿轮对间的最大滑动率及其差值, 其中3对齿轮副的滑动率差值分别降低了19.6%、90.9%、96.1%, 有效改善了齿面的滑动平衡性, 为行星轮系设计提供了参考。

关键词: 行星轮系; 中心距误差; 最大滑动率; 变位系数

中图分类号: TH111; TH132 **DOI:** 10.16578/j.issn.1004.2539.2026.03.003

0 引言

行星减速器是打捆装备中的关键传动部件。特别在单道重载打捆时, 行星轮系中各齿轮受力较大, 齿轮齿面磨损严重, 齿轮也更容易发生胶合失效。滑动率是影响齿轮啮合性能的重要几何参数中最重要的性能指标。尤其在高速重载场合下, 滑动率会大幅影响齿轮的传动性能^[1-3]。

国内许多学者对不同类型齿轮的滑动率进行了研究。梁栋等^[4]对点接触曲线结构的内啮合齿轮滑动率计算式进行推导, 并讨论了不同参数影响下齿面滑动率的变化规律。李优华等^[5]推导了齿轮齿条滑动率计算式, 并从提高抗胶合、耐磨损角度对齿轮进行了变位系数优化。陈厚军等^[6]基于齿面准线对双曲型法向圆弧齿轮的滑动率进行了相关研究。但是, 针对大速比行星轮系齿轮滑动率的研究较少。由于齿轮存在制造误差且安装时存在装配误差, 啮合齿轮对的实际中心距与理论中心距并不相等, 即存在中心距误差。中心距误差会引起齿轮滑动率发生变化, 影响轮系传动性能。

本文考虑中心距误差, 基于齿轮啮合原理对行星

轮系(图1)最大滑动率进行研究; 并基于等滑动率原则对变位系数进行优化, 使行星轮系齿面的相对滑动在中心距误差范围内显著降低, 对改善齿面磨损和提高齿轮抗胶合能力具有重要的现实意义。

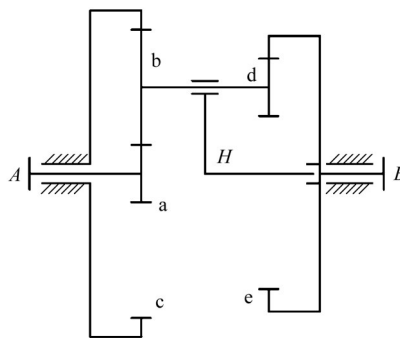


图1 3K-I型行星轮系结构简图

Fig. 1 Structural diagram of the 3K-I planetary gear train

1 建立最大滑动率计算模型

1.1 齿轮滑动率

如图2所示, 外啮合的1对轮齿在K点啮合时, 齿轮1、齿轮2在啮合点的线速度 v_{K1} 、 v_{K2} 的大小和方向都不相同, 但其在啮合点公法线方向的速度 v_n

收稿日期: 2024-10-16 修回日期: 2024-11-13

基金项目: 辽宁省教育厅科研支持项目(2020LNZD03, JYTZD2023094)

作者简介: 李传祥, 男, 1998年生, 山东肥城人, 在读硕士研究生; 主要研究方向为机构性能分析与优化; 530719786@qq.com。

陈东(通信作者), 男, 1972年生, 辽宁鞍山人, 博士, 教授; 主要研究方向为机械结构强度性能分析与优化、机器人技术及其应用; chendongas@126.com。

引用格式: 李传祥, 陈东, 王朝阳, 等. 含中心距误差的行星轮系最大滑动率与变位系数优化的研究[J]. 机械传动, 2026, 50(3): 23-30.

LI Chuanxiang, CHEN Dong, WANG Zhaoyang, et al. Study on maximum sliding rate of planetary gear train with center distance error and optimization of modification coefficient[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2026, 50(3): 23-30.



免费获取

相等。因此,两轮齿在齿廓切线方向的速度 v_{i1} 、 v_{i2} 存在滑动速度 v_{21} ,且 $v_{21} = v_{i2} - v_{i1}$ 。通常用滑动率表示齿面间相对滑动的程度。滑动率为啮合点处轮齿间相对切向速度与该点切向速度的比值,齿轮1、齿轮2的滑动率分别为

$$\begin{cases} \eta_1 = (v_{i2} - v_{i1})/v_{i1} \\ \eta_2 = (v_{i1} - v_{i2})/v_{i2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} v_{i1} = v_{K1} \sin \alpha_{K1} = \omega_1 \overline{N_1 K} \\ v_{i2} = v_{K2} \sin \alpha_{K2} = \omega_2 \overline{N_2 K} \end{cases} \quad (2)$$

式中, α_{K1} 、 α_{K2} 分别为齿轮1、齿轮2在K点处的压力角; ω_1 、 ω_2 分别为齿轮1、齿轮2的角速度。

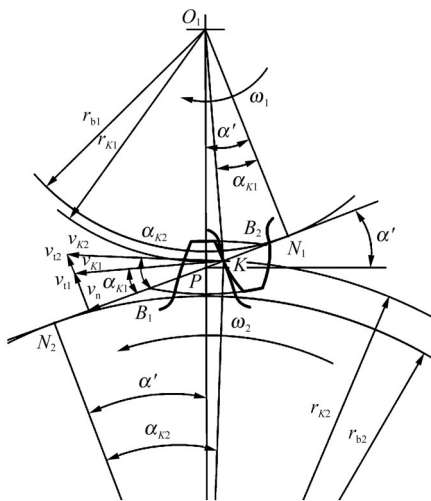


图2 齿轮传动啮合图

Fig. 2 Gear transmission meshing diagram

因 $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_2 P}}{\overline{O_1 P}} = \frac{\overline{N_2 P}}{\overline{N_1 P}} = \frac{z_2}{z_1} = u$, 即 $\omega_1 \overline{N_1 P} = \omega_2 \overline{N_2 P}$,

则

$$\eta_1 = \frac{\overline{PK}}{\overline{N_1 K}} \left(\frac{u+1}{u} \right) \quad (3)$$

式中, u 为齿数比; z_1 、 z_2 分别为齿轮1、齿轮2的齿数。

同理,

$$\eta_2 = \frac{\overline{PK}}{\overline{N_2 K}} (u+1) \quad (4)$$

在啮合过程中,轮齿只能在实际啮合线 $\overline{B_1 B_2}$ 上啮合;且在 B_1 、 B_2 点啮合时, η_2 、 η_1 分别达到实际的最大值,即

$$\eta_{2\max(\text{外})} = \frac{\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha'}{(1+u) \tan \alpha' - \tan \alpha_{a1}} (u+1) \quad (5)$$

$$\eta_{1\max(\text{外})} = \frac{\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha'}{[(u+1)/u] \tan \alpha' - \tan \alpha_{a2}} \frac{u+1}{u} \quad (6)$$

式中, α_{a1} 、 α_{a2} 分别为齿轮1、齿轮2的齿顶圆压力角。

同理,内啮合中,内齿轮、外齿轮的最大滑动率分别为

$$\eta_{3\max(\text{内})} = \frac{\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha'}{\tan \alpha_{a2} + (u-1) \tan \alpha'} (u-1) \quad (7)$$

$$\eta_{2\max(\text{内})} = \frac{\tan \alpha' - \tan \alpha_{a3}}{\tan \alpha_{a3} + [(1-u)/u] \tan \alpha'} \frac{u-1}{u} \quad (8)$$

1.2 含中心距误差的最大滑动率计算式推导

图3为低速级齿轮副啮合示意图。图3中, O_2 、 O_3 分别为外齿轮和内齿轮中心点; O'_2 、 P' 分别为外齿轮实际中心点和内齿轮副实际啮合节点。中心距误差 $\Delta\sigma$ 引起啮合节点偏差 ΔP ,根据渐开线齿轮传动的可分性可得

$$\begin{aligned} \frac{\overline{O'_2 P'}}{\overline{O_3 P'}} &= \frac{\overline{O_2 P}}{\overline{O_3 P}} \Rightarrow \frac{\overline{O_2 P} - \Delta\sigma + \Delta P}{\overline{O_3 P} + \Delta P} = \frac{\overline{O_2 P}}{\overline{O_3 P}} \Rightarrow \\ \Delta P &= \frac{u_3}{u_3 - 1} \Delta\sigma \end{aligned} \quad (9)$$

式中, $u_3 = \frac{z_3}{z_2} = \frac{\overline{O_3 P}}{\overline{O_2 P}}$ 。其中, z_3 为齿轮3的齿数。

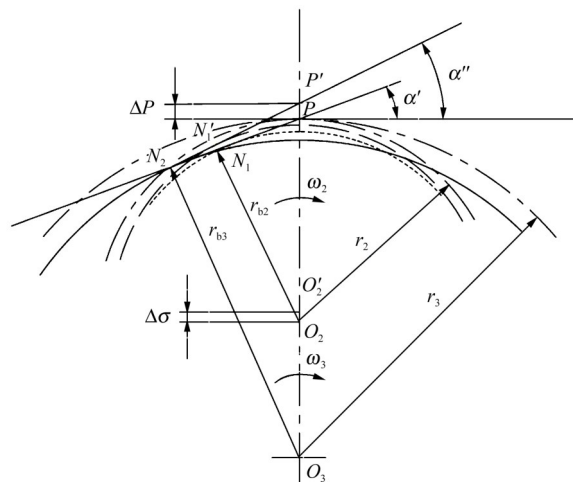


图3 低速级齿轮副啮合示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the low-speed gear pair meshing

将式(9)代入啮合角计算式,即可得到实际啮合角 α' 的计算式,为

$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= \frac{r_{b2}}{\overline{O'_2 P'}} = \frac{\overline{O_2 P} \cos \alpha}{\overline{O_2 P} - \Delta\sigma + \Delta P} = \\ &= \frac{\cos \alpha}{1 + \Delta\sigma / [(u_3 - 1) \overline{O_2 P}]} = \\ &= \frac{\cos \alpha}{1 + u_3 \Delta\sigma / [(u_3 - 1) \overline{O_3 P}]} \end{aligned} \quad (10)$$

式中, α 为理论啮合角。

$$\text{令 } \beta_5 = \frac{1}{(u_3 - 1) \overline{O_2 P}}, \beta_6 = \frac{u_3}{(u_3 - 1) \overline{O_3 P}}, \text{ 可得}$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= \arctan(\sqrt{\sec^2 \alpha'' - 1}) = \\ &= \arctan(\sqrt{[(1 + \beta_5 \Delta\sigma) / \cos \alpha]^2 - 1}) = \\ &= \arctan(\sqrt{[(1 + \beta_6 \Delta\sigma) / \cos \alpha]^2 - 1}) \end{aligned} \quad (11)$$

将 α' 分别代入内啮合主、从动轮最大滑动率表达式,可得

$$\eta_{2\max(\text{内})} = \frac{\sqrt{[(1 + \beta_5 \Delta\sigma)/\cos \alpha]^2 - 1} - \tan \alpha_{a3}}{\tan \alpha_{a3} + [(1 - u_3)/u_3] \sqrt{[(1 + \beta_5 \Delta\sigma)/\cos \alpha]^2 - 1}} \frac{u_3 - 1}{u_3} \quad (12)$$

$$\eta_{3\max(\text{内})} = \frac{\tan \alpha_{a2} - \sqrt{[(1 + \beta_6 \Delta\sigma)/\cos \alpha]^2 - 1}}{\tan \alpha_{a2} + (u_3 - 1) \sqrt{[(1 + \beta_6 \Delta\sigma)/\cos \alpha]^2 - 1}} (u_3 - 1) \quad (13)$$

式中, α_{a3} 为齿轮3的齿顶圆压力角。

图4为高速级齿轮副啮合示意图。图4中, 太阳轮中心距误差 $\Delta\sigma_1$ 和行星轮中心距误差 $\Delta\sigma_2$ 的存在, 导致太阳轮与行星轮啮合节点 P_1 及行星轮与内齿轮啮合节点 P_2 存在偏差, 啮合节点偏差分别为 ΔP_1 、 ΔP_2 。对于太阳轮与行星轮外啮合, 涉及中心距误差 $\Delta\sigma_1$ 、 $\Delta\sigma_2$, 需要考虑两部分误差对齿轮啮合带来的影响。设 O'_1 、 O'_2 分别为太阳轮、行星轮的实际中心点; P'_1 为啮合齿轮对的实际节点。根据渐开线齿轮传动的可分性知

$$\begin{aligned} \frac{\overline{O'_1 P'_1}}{\overline{O'_2 P'_1}} &= \frac{\overline{O_1 P_1}}{\overline{O_2 P_1}} \Rightarrow \frac{\overline{O_1 P_1} - \Delta\sigma_1 + \Delta P_1}{\overline{O_2 P_1} + \Delta\sigma_2 - \Delta P_1} = \frac{\overline{O_1 P_1}}{\overline{O_2 P_1}} \Rightarrow \Delta P_1 = \\ &= \frac{\overline{O_1 P_1} \Delta\sigma_2 + \overline{O_2 P_1} \Delta\sigma_1}{\overline{O_1 P_1} + \overline{O_2 P_1}} = \frac{1}{1 + u_1} \Delta\sigma_2 + \frac{u_1}{1 + u_1} \Delta\sigma_1 \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $u_1 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\overline{O_2 P_1}}{\overline{O_1 P_1}}$ 。

将上式代入啮合角计算式, 求得中心距误差下的实际啮合角 α'_1 计算式, 即

$$\cos \alpha'_1 = \frac{r_{b1}}{\overline{O'_1 P'_1}} = \frac{r_{b1}}{\overline{O_1 P_1} - \Delta\sigma_1 + \Delta P_1} = \cos \alpha / (1 + \frac{u_1}{1 + u_1} \frac{\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_1}{\overline{O_2 P_1}}) \quad (15)$$

$$\eta_{1\max(\text{外})} = \frac{\tan \alpha_{a2} - \sqrt{[(1 + \beta_1 C_1)/\cos \alpha]^2 - 1}}{[(u_1 + 1)/u_1] \sqrt{[(1 + \beta_1 C_1)/\cos \alpha]^2 - 1} - \tan \alpha_{a2}} \frac{1 + u_1}{u_1} \quad (17)$$

$$\eta_{2\max(\text{外})} = \frac{\tan \alpha_{a1} - \sqrt{[(1 + \beta_2 C_1)/\cos \alpha]^2 - 1}}{(1 + u_1) \sqrt{[(1 + \beta_2 C_1)/\cos \alpha]^2 - 1} - \tan \alpha_{a1}} (1 + u_1) \quad (18)$$

对于内啮合齿轮对, 考虑行星轮中心距误差 $\Delta\sigma_2$ 的影响, 啮合节点由 P_2 点移至 P'_2 点。最大滑动率计

$$\eta_{2\max(\text{内})} = \frac{\sqrt{[(1 + \beta_3 \Delta\sigma_2)/\cos \alpha_2]^2 - 1} - \tan \alpha_{a3}}{\tan \alpha_{a3} + [(1 - u_2)/u_2] \sqrt{[(1 + \beta_3 \Delta\sigma_2)/\cos \alpha_2]^2 - 1}} \frac{u_2 - 1}{u_2} \quad (19)$$

$$\eta_{3\max(\text{内})} = \frac{\tan \alpha_{a2} - \sqrt{[(1 + \beta_4 \Delta\sigma_2)/\cos \alpha_2]^2 - 1}}{\tan \alpha_{a2} + (u_2 - 1) \sqrt{[(1 + \beta_4 \Delta\sigma_2)/\cos \alpha_2]^2 - 1}} (u_2 - 1) \quad (20)$$

式中, α_2 为内啮合理论啮合角; $u_2 = \frac{z_3}{z_2} = \frac{\overline{O_3 P_2}}{\overline{O_2 P_2}}$;

$\beta_3 = 1/[(u_2 - 1) \overline{O_2 P_2}]$; $\beta_4 = u_2/[(u_2 - 1) \overline{O_3 P_2}]$ 。

2 考虑中心距误差时最大滑动率影响因素分析

在渐开线齿轮啮合过程中, 某一啮合点处的线

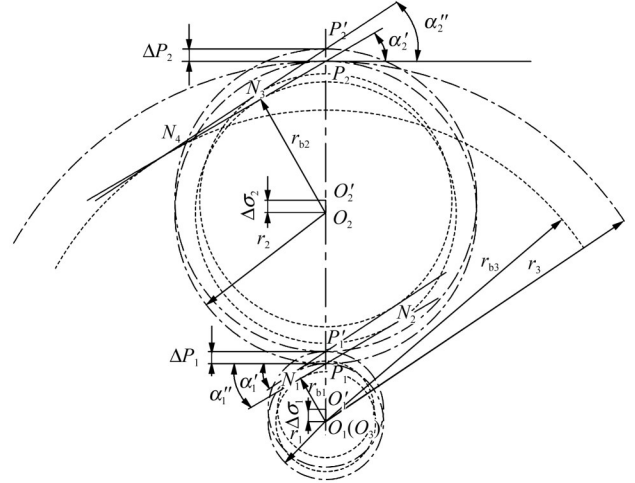


图4 高速级齿轮副啮合示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the high-speed gear pair meshing

$$\text{令 } \beta_1 = \frac{1}{(1 + u_1) \overline{O_1 P_1}}, \beta_2 = \frac{u_1}{(1 + u_1) \overline{O_2 P_1}}, C_1 = \Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_1, \text{ 可得}$$

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= \arctan(\sqrt{\sec^2 \alpha'_1 - 1}) = \\ &= \arctan(\sqrt{[(1 + \beta_1 C_1)/\cos \alpha]^2 - 1}) = \\ &= \arctan(\sqrt{[(1 + \beta_2 C_1)/\cos \alpha]^2 - 1}) \end{aligned} \quad (16)$$

将 α'_1 分别代入外啮合主、从动轮最大滑动率表达式, 可得

$$\eta_{1\max(\text{外})} = \frac{\tan \alpha_{a2} - \sqrt{[(1 + \beta_1 C_1)/\cos \alpha]^2 - 1}}{[(u_1 + 1)/u_1] \sqrt{[(1 + \beta_1 C_1)/\cos \alpha]^2 - 1} - \tan \alpha_{a2}} \frac{1 + u_1}{u_1} \quad (17)$$

$$\eta_{2\max(\text{外})} = \frac{\tan \alpha_{a1} - \sqrt{[(1 + \beta_2 C_1)/\cos \alpha]^2 - 1}}{(1 + u_1) \sqrt{[(1 + \beta_2 C_1)/\cos \alpha]^2 - 1} - \tan \alpha_{a1}} (1 + u_1) \quad (18)$$

算式参照低速级内啮合, 则内啮合主、从动轮最大滑动率表达式分别为

$$\eta_{2\max(\text{内})} = \frac{\sqrt{[(1 + \beta_3 \Delta\sigma_2)/\cos \alpha_2]^2 - 1} - \tan \alpha_{a3}}{\tan \alpha_{a3} + [(1 - u_2)/u_2] \sqrt{[(1 + \beta_3 \Delta\sigma_2)/\cos \alpha_2]^2 - 1}} \frac{u_2 - 1}{u_2} \quad (19)$$

$$\eta_{3\max(\text{内})} = \frac{\tan \alpha_{a2} - \sqrt{[(1 + \beta_4 \Delta\sigma_2)/\cos \alpha_2]^2 - 1}}{\tan \alpha_{a2} + (u_2 - 1) \sqrt{[(1 + \beta_4 \Delta\sigma_2)/\cos \alpha_2]^2 - 1}} (u_2 - 1) \quad (20)$$

速度是不同的; 除节点外, 轮齿间存在相对滑动。在工程上常使用滑动率表示轮齿相对滑动的程度^[7]。本文研究的3K-I型行星轮系包含3对齿轮副, 分别为高速级外啮合、内啮合齿轮副和低速级内啮合齿轮副。以表1所示的行星轮系各齿轮参数为例进行分析。由最大滑动率计算式可知, 中心距误差是影响

齿轮最大滑动率的因素。

表1 行星轮系各齿轮初始参数

Tab. 1 Initial parameters of various gears in the planetary gear train

参数	高速级			低速级	
	太阳轮 a	行星轮 b	内齿圈 c	行星轮 d	内齿圈 e
齿数	9	20	51	18	48
模数/mm	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75
$\alpha/(\circ)$	20	20	20	20	20
变位系数	0.27	0.288 6	-0.141 7	0.264	0.264

以中心距误差为横坐标, 齿轮最大滑动率的绝对值为纵坐标, 参考文献[8]中的中心距误差取值范围并适当扩大误差范围, 选取中心距误差范围为 $[-0.1, 0.1]$ mm。图5所示为各齿轮副中心距误差与最大滑动率的关系曲线。

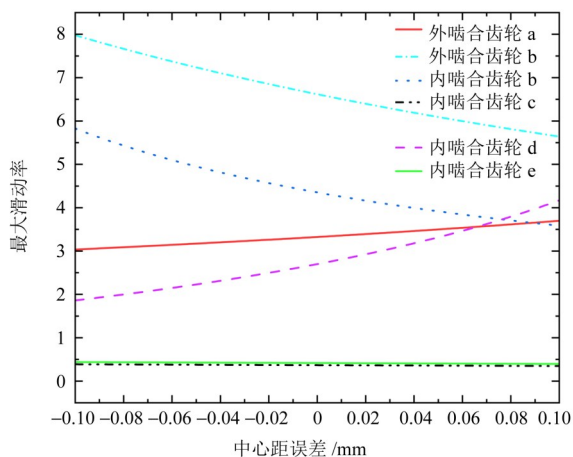


图5 行星轮系各齿轮最大滑动率与中心距误差关系

Fig. 5 Relation between the maximum sliding rate and the center distance error of each gear of the planetary gear train

分析图5可知:

1) 在中心距误差范围内, 外啮合齿轮副中, 小齿轮最大滑动率随中心距误差的变化而增加, 大齿轮变化趋势与之相反。

2) 在中心距误差范围内, 内啮合齿轮副中, 两内齿轮最大滑动率均随着中心距误差的变化而降低, 但两外齿轮却出现相反的变化趋势。

基于前文分析, 中心距误差对外啮合与内啮合齿轮副最大滑动率的影响趋势不同。为深入探究变位系数与齿数比的影响规律, 在保持模数、齿顶高系数及中心距误差取值一致的前提下, 分别选取高速级外啮合与低速级内啮合齿轮副作为研究对象。设定中心距误差分别为 -0.10 、 -0.06 、 -0.02 、 0 、 0.02 、 0.06 、 0.10 mm, 重点分析了变位系数和齿数比对各齿轮最大滑动率的影响。图6~图9所示分别

为外、内啮合条件下, 变位系数及齿数比与最大滑动率的对应关系。

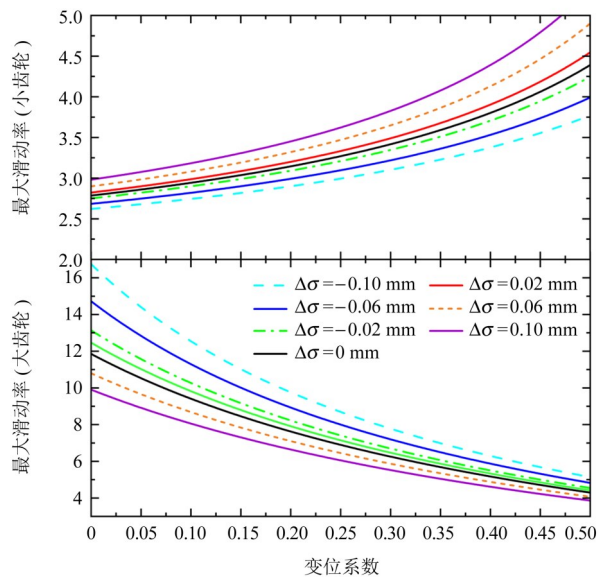


图6 外啮合变位系数与最大滑动率

Fig. 6 External mesh modification coefficient and the maximum sliding rate

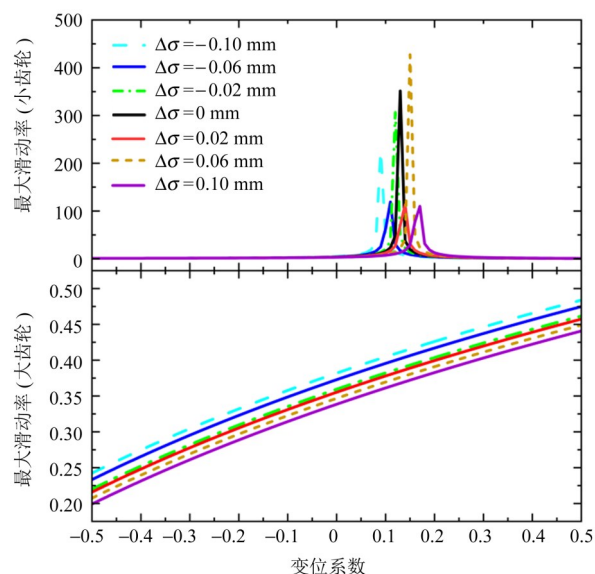


图7 内啮合变位系数与最大滑动率

Fig. 7 Internal meshing modification coefficient and the maximum sliding rate

通过分析图6~图9, 可以得出以下结论:

1) 外啮合齿轮副中, 小齿轮最大滑动率随着变位系数的变化而增加, 且在中心距误差由负值向正值变化的过程中, 小齿轮的最大滑动率整体有所增加, 大齿轮最大滑动率变化趋势与小齿轮相反; 齿轮副中, 各齿轮最大滑动率均随着齿数比的增加而降低, 小齿轮最大滑动率随着中心距误差变化的过程整体有所增加, 大齿轮则相反。

2) 对于内啮合小齿轮, 在无中心距误差时, 其

最大滑动率随变位系数增大呈先增后减趋势, 并在 0.13 处达到峰值。引入中心距误差后, 峰值位置发生偏移, 负误差使峰值点向无误差峰值的左侧移动, 且偏移量随误差值的增大而增加; 正误差则使峰值点向右侧偏移。

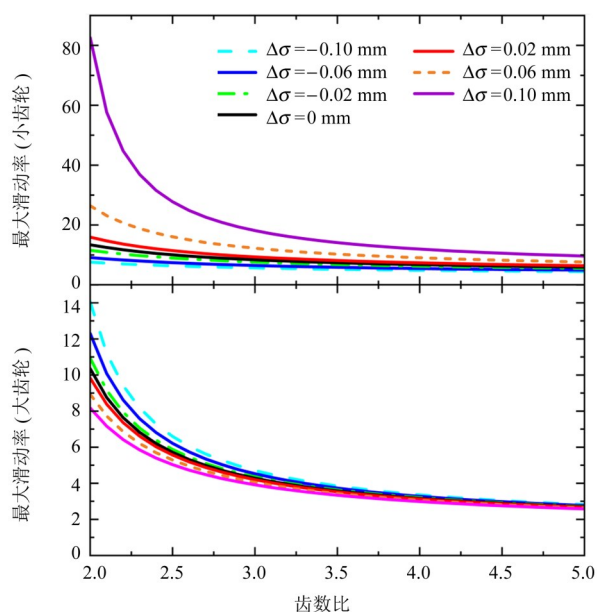


图8 外啮合齿数比与最大滑动率

Fig. 8 External gear tooth ratio and the maximum sliding rate

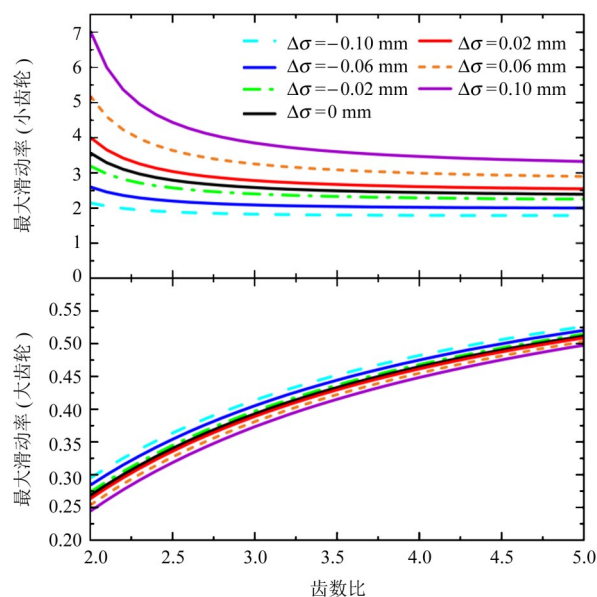


图9 内啮合齿数比与最大滑动率

Fig. 9 Internal gear tooth ratio and the maximum sliding rate

3) 内啮合大齿轮的最大滑动率随变位系数的变化规律, 虽与外啮合小齿轮呈现出相似的趋势, 但其整体变化方向却与之相反。在齿数比影响方面, 随着齿数比增大, 小齿轮最大滑动率逐渐降低, 大齿轮则相应升高, 这一演变规律与外啮合齿轮副保持一致。

因此, 变位系数及齿数比是影响齿轮最大滑动

率的主要因素。其中, 变位系数影响最大, 在一定值范围内会使齿轮最大滑动率大幅增加且变化趋势发生转变。

3 基于等滑动率原则的变位系数优化

在对行星轮系的优化设计中, 需要重点考虑变位系数对齿轮最大滑动率的影响, 合理分配变位系数, 使轮系中各齿轮最大滑动率尽可能地降低, 并且使各齿轮副间的滑动率尽可能相等, 从而避免齿轮的破坏。对于约束条件下的非线性优化问题, 其数学模型包括优化设计变量、优化目标函数、约束条件3个基本要素。

3.1 目标函数

以滑动率为优化目标, 选择含中心距误差的行星轮系各齿轮对最大滑动率绝对值差值的和最小为目标函数。

3K-I 型行星轮系包括3部分滑动率差值:

太阳轮a与行星轮b之间的滑动率差值 η_{10} , 即

$$\min f_1(x) = \eta_{10} = |\eta_{1\max(\text{外})}| - |\eta_{2\max(\text{外})}| \quad (21)$$

行星轮b与内齿圈c之间的滑动率差值 η_{20} , 即

$$\min f_2(x) = \eta_{20} = |\eta_{2\max(\text{内})}| - |\eta_{3\max(\text{内})}| \quad (22)$$

行星轮d与内齿圈e之间的滑动率差值 η_{30} , 即

$$\min f_3(x) = \eta_{30} = |\eta_{4\max(\text{内})}| - |\eta_{5\max(\text{内})}| \quad (23)$$

采用加权平均法^[9-10], 将各分目标函数通过加权求和形成统一的总目标函数, 把复杂的多目标问题转换为单目标问题。

总目标函数为

$$\min F(x) = 0.714\eta_{10} + 0.143\eta_{20} + 0.143\eta_{30} \quad (24)$$

3.2 优化设计变量

优化设计变量是影响设计质量和结果的可变参数。由上述分析可知, 变位系数对轮系各啮合齿轮最大滑动率影响显著, 选择合适的齿轮变位系数对提高齿轮齿面承载能力十分重要。因此, 在不改变行星轮系各齿轮模数、齿数等参数的情况下, 优化设计变量选取轮系各齿轮变位系数及太阳轮与双联行星轮的中心距误差, 即

$$X = [x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, \Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T \quad (25)$$

3.3 约束条件的建立

在行星轮系传动系统设计过程中, 相关几何尺寸会随着齿轮参数的变化而变化, 同时, 相应传动质量指标也会随之变化。虽然变位系数选取的限制条件较多, 但最主要的是保证齿廓不重叠干涉和连续传动条件^[11]。本文变位系数优化设计中, 主要约束函数有以下4个方面。

1) 齿轮齿根不根切约束条件。对于小齿数的太阳轮, 为

$$x_1 - \frac{14 - z_1}{z_{\min}} \geq 0 \tag{26}$$

对于其他齿轮, 为

$$x_i - h_a^* + 0.5z_i \sin^2 \alpha \geq 0, i = 2, 3, 4, 5 \tag{27}$$

式中, $z_{\min}$ 为齿轮不根切的最小齿数, $z_{\min} = 17$; h_a^* 为齿顶高变动系数, $h_a^* = 1$ 。

2) 重合度约束条件。表达式为

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1(\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha') \pm z_2(\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha')}{2\pi} \geq 1.1 \tag{28}$$

式中, α' 为各齿轮副实际啮合角。

3) 齿顶圆齿厚约束条件。表达式为

$$d_{ai} \left[\frac{\pi + 4x_i \tan \alpha}{2z_i} + f_{\text{inv}}(\alpha) - f_{\text{inv}}(\alpha_{ai}) \right] \geq [S_a],$$

$$i = a, b, c, d, e \tag{29}$$

式中, $f_{\text{inv}}(\cdot)$ 为渐开线函数; $[S_a]$ 为许用齿顶圆厚度, 一般取 $0.3m$, 其中, m 为齿轮模数。

4) 中心距约束条件。当中心距误差小于 0 时, 在实际中无法安装行星轮系。因此, 对中心距误差做适当约束, 即

$$0 \leq \Delta\sigma \leq 0.1 \text{ mm} \tag{30}$$

3.4 优化结果分析

编写目标函数及约束条件的 Matlab 软件程序, 并利用 fmincon 命令进行优化求解。优化前、后的变量参数如表 2 所示。

对优化后轮系各齿轮最大滑动率及差值进行求解, 优化前、后对比如表 3 所示。

表 2 行星轮系设计变量优化前、后对比

Tab. 2 Comparison of the design variables of the planetary gear train before and after optimization

参数	x_a	x_b	x_c	x_d	x_e	$\Delta\sigma_1/\text{mm}$	$\Delta\sigma_2/\text{mm}$
变量名称	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
初始值	0.27	0.288 6	-0.141 7	0.264	0.264	0	0
优化值	0.294 1	0.886 6	0.865 5	0.039 1	0.566 8	0	0.1

表 3 优化前、后齿轮最大滑动率及差值对比

Tab. 3 Comparison of the maximum sliding rate and the difference of gears before and after optimization

名称		太阳轮 a	行星轮 b		内齿圈 c	行星轮 d	内齿圈 e
			外啮合	内啮合			
最大滑动率	优化前	-3.325 4	6.617 7	-4.359 9	0.369 4	2.699 4	0.416 8
	优化后	-2.719 7	4.529 3	0.143 2	0.426 5	0.529 5	0.335 6
	变化率/%	18.2	31.6	96.7	15.5	80.4	19.5
差值	优化前	3.292 3		3.990 5		2.282 6	
	优化后	1.809 6		0.283 3		0.193 9	
	变化率/%	45.0		92.9		91.5	

通过对比分析可知, 优化后最大滑动率除内齿圈 c 有较小增大外, 其余各齿轮均有不同幅度的降低; 优化后 3 对齿轮副滑动率差值分别降低了 45.0%、92.9%、91.5%。表明变位系数优化有效改善了各齿轮副间的磨损情况。

由行星轮系各齿轮最大滑动率表达式, 在太阳轮中心距误差范围 $\Delta\sigma_1 \in [0, 0.1] \text{ mm}$ 及双联行星轮中心距误差范围 $\Delta\sigma_2 \in [0, 0.1] \text{ mm}$ 内, 利用 Matlab 软件编程, 绘制轮系中 3 对齿轮副优化前后齿轮最大滑动率绝对值差值在中心距误差范围内的变化情况, 如图 10~图 12 所示。由图 10~图 12 可知, 在中心距误差范围内, 优化后 3 对齿轮副间最大滑动率绝对值的差值均有不同幅度的降低。

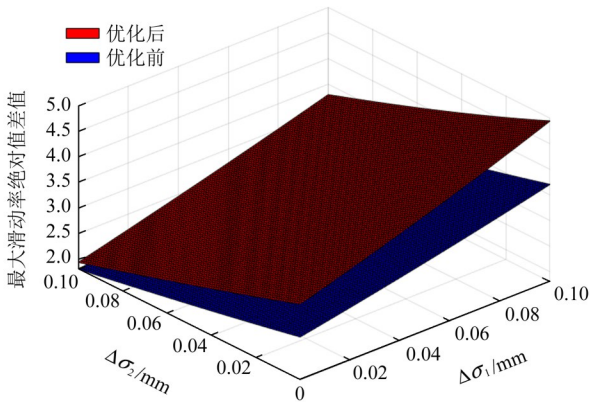


图 10 高速级外啮合优化前后对比图

Fig. 10 Comparison diagram of the high-speed external meshing before and after optimization

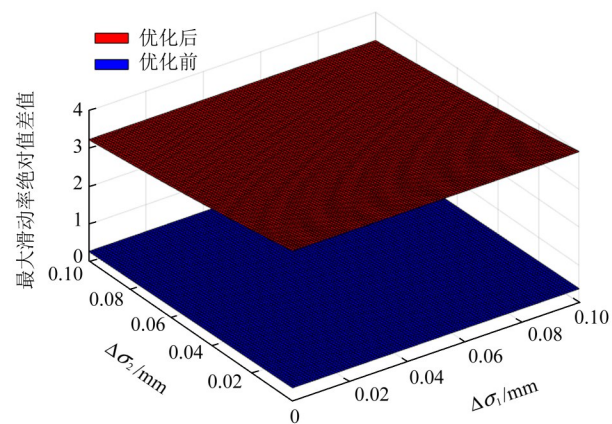


图 11 高速级内啮合优化前后对比图

Fig. 11 Comparison diagram of the high-speed internal meshing before and after optimization

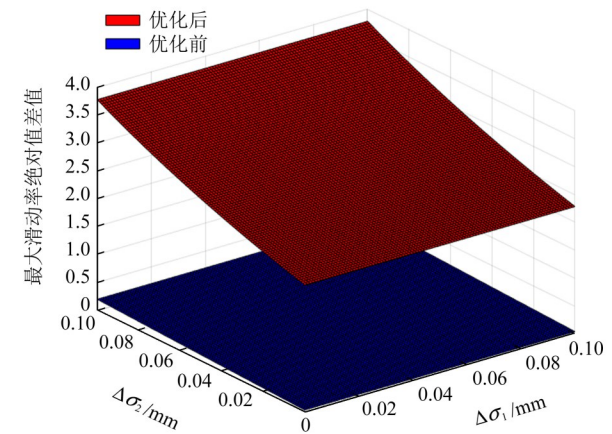


图 12 低速级内啮合优化前后对比图

Fig. 12 Comparison diagram of the low-speed internal meshing before and after optimization

以均值为优化性能评估参数，对优化前后的轮系中3对齿轮副间最大滑动率绝对值差值进行优化性能评估。在中心距误差 $\Delta\sigma_1$ 与 $\Delta\sigma_2$ 范围内，将中心距误差100等分，分别求解优化前后3对齿轮副间最大滑动率绝对值差值，得到6个目标矩阵。优化前、后矩阵均值对比如表4所示。

表 4 优化性能评估

名称		齿轮副		
		高速级外啮合	高速级内啮合	低速级内啮合
均值	优化前	3. 317 3	3. 580 4	2. 951 5
	优化后	2. 668 6	0. 324 5	0. 115 0
变化率/%		19. 6	90. 9	96. 1

分析优化前、后最大滑动率绝对值差值的变化情况可知，在中心距误差允许范围内，优化后轮系中3对齿轮副间最大滑动率绝对值的差值分别降低了19.6%、90.9%、96.1%，优化结果较好。

3.5 优化方案分析

为简便优化程序，将中心距误差作为优化设计变量，这必然会影响优化效果。因此，需进行优化方案的分析。考虑将中心距误差作为优化设计变量对优化结果的影响，取4组中心距误差作为定值，并对变位系数进行优化。优化结果与第3.4节中优化结果的对比如表5所示。

表 5 优化方案分析

参数	方案	太阳轮 a	行星轮 b		内齿圈 c	行星轮 d	内齿圈 e
			外啮合	内啮合			
变位系数	①	0. 294 1	0. 886 6		0. 865 5	0. 039 1	0. 566 8
	②	0. 302 2	0. 920 3		0. 907 6	0. 097 0	0. 633 6
	③	0. 321 5	0. 715 3		0. 593 3	0. 373 2	0. 776 5
	④	0. 309 7	0. 805 0		0. 689 9	0. 472 1	0. 884 0
	⑤	0. 306 7	0. 769 7		0. 675 0	0. 195 2	0. 632 5
最大滑动率	①	-2. 719 7	4. 529 3	0. 143 2	0. 426 5	0. 529 5	0. 335 6
	②	-2. 556 1	5. 191 9	0. 052 9	0. 449 0	0. 286 2	0. 369 7
	③	-2. 899 5	5. 099 6	0. 465 9	0. 405 6	0. 225 3	0. 411 1
	④	-2. 505 0	6. 603 9	0. 231 0	0. 435 9	0. 054 2	0. 450 5
	⑤	-2. 669 0	5. 653 2	0. 340 1	0. 412 7	0. 425 7	0. 373 9
最大滑动率差值	①	1. 809 5		0. 283 3		0. 194 0	
	②	2. 635 8		0. 396 1		0. 083 5	
	③	2. 200 1		0. 060 3		0. 184 9	
	④	4. 098 9		0. 204 9		0. 396 4	
	⑤	2. 984 2		0. 072 6		0. 051 8	

方案①为中心距误差作为优化设计变量；方案②为 $\Delta\sigma_1 = 0$ 、 $\Delta\sigma_2 = 0$ ；方案③为 $\Delta\sigma_1 = 0$ 、 $\Delta\sigma_2 = 0.1 \text{ mm}$ ；方案④为 $\Delta\sigma_1 = 0.1 \text{ mm}$ 、 $\Delta\sigma_2 = 0$ ；方案⑤为 $\Delta\sigma_1 = 0.1 \text{ mm}$ 、 $\Delta\sigma_2 = 0.1 \text{ mm}$ 。

在齿轮啮合过程中，齿轮的滑动率与最大滑动率差值越小，齿轮的传动越平稳、能量损失越小、齿轮对间的磨损越平衡。

对比5种优化方案可知，当中心距误差作为优化设计变量时，3对齿轮副滑动率差值和最小，且各齿轮副滑动率差值及各齿轮最大滑动率结果较好。因此，将中心距误差作为优化设计变量的方案合理。

4 结论

在考虑中心距误差的基础上，研究了3K-I型行星轮系的最大滑动率及其影响因素，并基于等滑动率原则对其变位系数进行了优化。得到以下主要结论：

1) 考虑中心距误差，推导出齿轮最大滑动率的计算模型。其中，变位系数和齿数比是影响最大滑动率的主要因素。

2) 在中心距误差范围内，外啮合齿轮副中，小齿轮最大滑动率随中心距误差由正值向负值的变化而增加，大齿轮变化趋势相反；内啮合齿轮副中，两内齿轮最大滑动率均随着中心距误差的变化而降低，但两外齿轮会出现相反的变化趋势。

3) 变位系数及齿数比是影响齿轮最大滑动率的主要因素。其中，变位系数的影响最大，在一定范围内会使齿轮最大滑动率大幅增加且变化趋势发生转变。

4) 优化后的轮系中，3对齿轮副间最大滑动率绝对值的差值分别降低了19.6%、90.9%、96.1%。

参 考 文 献

- [1] 章易程,李蔚,聂昌平. 渐开线内齿轮副相对滑动率的研究[J]. 机械传动,2001,25(2):25-27.
ZHANG Yicheng, LI Wei, NIE Changping. Study on relative sliding ratio of involute internal gear pair[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2001, 25(2): 25-27.
- [2] 易文翠,吴佳恬,黄健. 点接触内摆线行星传动齿面方程及滑动特性研究[J]. 机械传动,2015,39(9):50-53.
YI Wencui, WU Jiatian, HUANG Jian. Research of the tooth surface equation and sliding characteristic of internal cycloid planetary transmission with point contact[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2015, 39(9): 50-53.
- [3] 刘邵宏,杜群贵. 含中心距误差因素等滑动率原则的内啮合齿轮变位系数[J]. 煤矿机械,2018,39(3):18-19.
LIU Shaohong, DU Qungui. Sliding influence and modification coefficient optimization under center distance deviation of internal gear[J]. Coal Mine Machinery, 2018, 39(3): 18-19.
- [4] 梁栋,孟胜. 点接触曲线构型内啮合齿轮传动接触特性分析[J]. 科学技术与工程,2022,22(30):13308-13314.
LIANG Dong, MENG Sheng. Meshing characteristics analysis of point-contact internal gear drive with curve construction[J]. Science Technology and Engineering, 2022, 22(30): 13308-13314.
- [5] 李优华,丁炜,刘忠明,等. 开式齿轮齿条传动滑动率计算及变位系数优化分析[J]. 机械设计,2020,37(增刊2):78-82.
LI Youhua, DING Wei, LIU Zhongming, et al. Calculation of sliding ratio and optimization analysis of modification coefficient of open pinion and rack drive[J]. Journal of Machine Design, 2020, 37(Suppl. 2): 78-82.
- [6] 陈厚军,张玲玲,颜光稳,等. 双曲线法向圆弧齿轮传动的滑动特性分析[J]. 机械设计,2018,35(2):94-97.
CHEN Houjun, ZHANG Lingling, YAN Guangwen, et al. Analysis on sliding characteristics of hyperboloidal-type normal circular-arc gears[J]. Journal of Machine Design, 2018, 35(2): 94-97.
- [7] 李优华,陈超,张志宏,等. 渐开线齿轮传动滑动率分析[J]. 轻工科技,2020,36(4):49-52.
LI Youhua, CHEN Chao, ZHANG Zhihong, et al. Slip rate analysis of involute gear transmission[J]. Light Industry Science and Technology, 2020, 36(4): 49-52.
- [8] 张展. 渐开线圆柱齿轮传动[M]. 北京:机械工业出版社,2012:168-236.
ZHANG Zhan. Involute cylindrical gear drive[M]. Beijing: China Machine Press, 2012: 168-236.
- [9] 刘雨. 盾构机行星齿轮减速器的均载特性分析与优化[D]. 石家庄:石家庄铁道大学,2023:42-43.
LIU Yu. Analysis and optimization of load sharing characteristics of shield machine planetary gear reducer[D]. Shijiazhuang: Shijiazhuang Tiedao University, 2023: 42-43.
- [10] 周鹏,郭迎福,刘厚才. 行星齿轮减速器多目标优化设计[J]. 机械工程师,2014(5):1-3.
ZHOU Peng, GUO Yingfu, LIU Houcai. Multi-objective optimization design of planetary gear reducer[J]. Mechanical Engineer, 2014(5): 1-3.
- [11] 冯定,杨行,冯一璟,等. 基于Matlab的渐开线少齿差行星齿轮变位系数取值方法研究[J]. 机械传动,2017,41(7):18-21.
FENG Ding, YANG Hang, FENG Yijing, et al. Research of the method of selection of modification coefficient value of the planetary involute gear with small teeth difference based on Matlab[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2017, 41(7): 18-21.

(下转第69页)